## DM2 pour le Mardi 11 Décembre

**Définition :**
On définit inductivement la classe des *fonction primitive récursive* $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ comme suit :

— L'identité id : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x$ est primitive récursive.

— La fonction successeur S : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x+1$ est primitive récursive.

— Les fonctions constantes $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ sont primitives récursives.

— Les projections $\pi_{i,n} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} : x \mapsto x_i$ sont primitive récursives

— Pour $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ et $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^k$ deux fonctions primitive récursives, leur composition $g \circ f$ l'est aussi.

— Pour $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ et $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ deux fonctions primitive récursives, leur pairing $\langle f, g\rangle : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^{k+m} x \mapsto (f(x), g(x))$ l'est aussi.

— Pour deux fonctions $z : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ et $r : \mathbb{N}^{n+k} \to \mathbb{N}^k$ primitives récursives, alors leur récursion $\mathrm{rec}(z,r) : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^k$ est primitive récursive. On rappelle que la récursion de $z$ et $r$ est l'unique fonction satisfaisant :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{rec}(z,r)(x_0,\ldots,x_{n-1},0) & = & z(x_0,\ldots,x_{n-1}) \\ \mathrm{rec}(z,r)(x_0,\ldots,x_{n-1},m+1) & = & r(x_0,\ldots,x_{n-1},\mathrm{rec}(z,r)(x_0,\ldots,x_{n-1},m)) \end{array}$$

**Exercice 1.**
On définit la fonction d'Ackermann $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ comme :

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0 \end{cases}$$

On a par exemple :

$$A(0,n) = n+1 \quad A(1,n) = n+2 \quad A(2,n) = 2n+3 \quad A(3,n) = 2^{n+3} - 3$$

On admettra que cette fonction est **totale** et **strictement croissante** en ses deux arguments. On définit de plus $sum_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ renvoyant la somme de ses arguments. On admet que $sum_k$ est primitive récursive pour tout $k \in \mathbb{N}$

**1.** Montrez que pour tout entiers naturels $m, n \in \mathbb{N}$, on a$A(m+1,n) \geq A(m,n+1)$ et $A(m+2,n) \geq 2\ A(m,n)$.

Pour $f$ une fonction primitive récursive $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$, on note $P(f)$ la propriété :

$$\exists C(f) \in \mathbb{N}, \forall n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}, sum_m \circ f(n_1,\ldots,n_k) \leq A(C(f), sum_k(n_1,\ldots,n_k))$$

**2.** Montrez que $P(f)$ est vrai pour les fonctions identité, successeur, constantes, et projections. Montrez que si $P(f)$ et $P(g)$ sont vrais, alors $P(g \circ f)$ et $P(\langle f, g\rangle)$ sont vrais.

**3.** Montrez que si $P(z)$ et $P(r)$ sont vrais, alors il existe $C(rec(z,r)) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ on ait :

$$sum_k(n_1,\ldots,n_k) + sum_m \circ rec(z,r)(n_1,\ldots,n_k) \leq A(C(rec(z,r)), sum_k(n_1,\ldots,n_k))$$

On en déduit alors par induction structurelle que $P(f)$ est vrai pour toute fonction récursive primitive $f$.

**4.** Montrez que la fonction $n \mapsto A(n,n)$ n'est pas primitive récursive. Déduisez-en que la fonction d'Ackermann ne l'est pas non plus.

**5.** **(Facultatif)** Expliquez (sans entrer dans les détails) comment on peut calculer Ackermann à l'aide d'une Machine de Turing.

Cela fait de la fonction Ackermann une fonction récursive mais non primitive récursive.