

TD 3

Devoir maison : les exercices 6 et 7 sont à rendre pour le 16 octobre, en TD ou dans nos casiers au 3^{ème} (situés dans le bocal à imprimantes). Ça comptera un petit peu pour la note de contrôle continu.

Exercice 1.

Minimisation

Définition 1 (Congruence de Nérode). Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l’état initial. La congruence \sim suivante, vue en cours, s’appelle la congruence de Nérode :

$$q \sim q' \text{ ssi } \forall u \in \Sigma^* \delta^*(q, u) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q', u) \in F$$

Définition 2 (Algorithme de Moore). Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l’état initial. On définit \sim_i sur Q par :

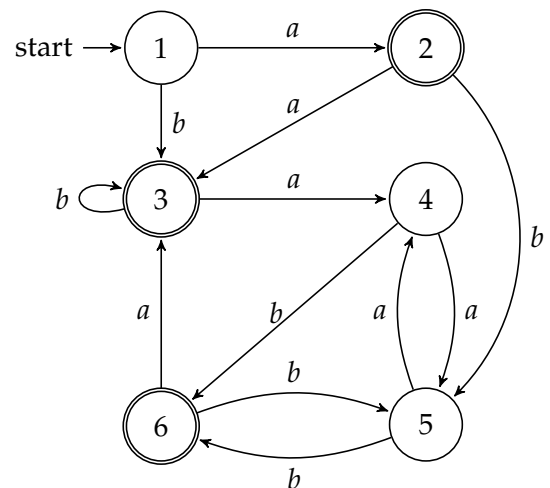
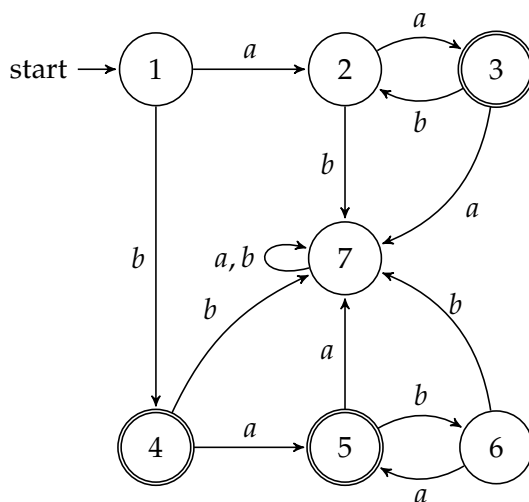
$$q \sim_0 q' \text{ ssi } (q, q' \in F \text{ ou } q, q' \notin F)$$

$$q \sim_{i+1} q' \text{ ssi } q \sim_i q' \text{ et } \forall a \in \Sigma, \delta(q, a) \sim_i \delta(q', a)$$

pour tous états q, q' de Q et pour tout $i \geq 0$.

L’algorithme de Moore consiste à calculer la suite des \sim_i jusqu’à un indice k tel que $\sim_k = \sim_{k+1}$, auquel cas on renvoie \sim_k .

1. Rappeler pourquoi l’algorithme de Moore termine et renvoie la congruence de Nérode. Quelle est sa complexité ?
2. Exécuter l’algorithme de Moore sur les automates suivants et donner les automates minimaux correspondants :



Exercice 2.*Asymétrie*Calculer les résiduels de Σ^*a et $a\Sigma^*$. Méditer.**Exercice 3.***Mettons de l'ordre*Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ . On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique \leq_{lex} sur Σ^* . On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L , on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique. Montrer que L_{lex} est rationnel.**Exercice 4.***Scinder, séparer*

1. Soit A un langage régulier infini. Prouvez qu'on peut scinder A en deux sous-ensembles réguliers infinis.

Soient B et D deux langages. On note $B \Subset D$ si $B \subseteq D$ et $D \setminus B$ est infini.

2. Montrez que pour tous langages réguliers B et D tels que $B \Subset D$ il existe un langage C régulier tel que $B \Subset C \Subset D$.

Exercice 5.*Liste*Pour chacun des langages L suivant :

- Si L est régulier : donner le nombre d'état de l'automate minimal de L
- Si L n'est pas régulier : exhiber un nombre infini de résiduels de L

1. $L_1 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0\}$.
2. $L_2 = \{w\bar{w}, w \in \{0, 1\}^*\}$.
3. $L_3 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x|_0 \text{ pair et } |x|_1 \text{ impair}\}$.
4. $L_4 = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \text{chaque bloc de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros}\}$.
5. $L_5 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x|_0 = |x|_1\}$.
6. L_6 est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{\text{ième}}$ lettre en partant de la fin est un a .
7. $L_7 = \Sigma^* \setminus \{ww : w \in \Sigma^*\}$.

Exercice 6.*1 est presque pair*On définit sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ le langage L composé de tous les mots non vides qui contiennent soit un seul b , soit un nombre pair de b . Calculez tous les langages résiduels de L , puis en déduire l'automate minimal qui reconnaît L .**Exercice 7.***Chacun son reste*

1. Pour tout alphabet de deux lettres ou plus, trouver un langage L tel que tous les mots aient des résiduels distincts, i.e. $u^{-1}L = v^{-1}L \Rightarrow u = v$.
2. Caractériser tous les langages avec cette propriété sur les alphabets à une lettre.