TD 8

Définition :
La classe des *fonctions primitives récursives* $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ est définie inductivement comme suit :

— l'identité id : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ appartient à $\mathcal{PR}$

— si $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ et $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ sont primitives récursives, $g \circ f$ est primitive récursive.

— les fonctions constantes sont primitives récursives

— les projections
$$\begin{array}{rlcl} \pi_{i,n} : & \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N} \\ & (x_0, \ldots, x_{n-1}) & \mapsto & x_i \end{array}$$
sont primitives récursives.

— si $(f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k) \in \mathcal{PR}$ et $(g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m) \in \mathcal{PR}$, alors, le pairing
$$\begin{array}{rlcl} \langle f, g \rangle : & \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N}^{k+m} \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) = (\pi_{0,k}(f(x)), \ldots, \pi_{k-1,k}(f(x)), \pi_{0,n}(g(x)), \ldots, \pi_{n-1,n}(g(x))) \end{array}$$
est primitif récursif

— $S : x \mapsto x + 1$ est primitive récursive

— si $(r : \mathbb{N}^{n+k} \to \mathbb{N}^k) \in \mathcal{PR}$ and $(z : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k) \in \mathcal{PR}$, alors l'unique fonction $\mathrm{rec}(z, r) : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^k$ satisfiant les équations suivantes est primitive récursive.
$$\begin{array}{lcl} \mathrm{rec}(z,r)(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0) & = & z(x_0, \ldots, x_{n-1}) \\ \mathrm{rec}(z,r)(x_0, \ldots, x_{n-1}, m+1) & = & r(x_0, \ldots, x_{n-1}, \mathrm{rec}(z,r)(x_0, \ldots, x_{n-1}, m)) \end{array}$$

Exercice 1.
Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

1. L'addition et la multiplication.
2. La fonction *égalité à* 0 $eq0$ définie par $eq0(n) = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon.
3. La fonction *égalité* eq définie par $eq(m, n) = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.
4. La fonction *prédécesseur* p définie par $p(n) = \max(0, n - 1)$.
5. La fonction *quasi-différence* sub définie par $sub(n, m) = n - m$ si $n \geq m$ et 0 sinon.
6. La fonction *division* div où $div(m, n)$ est le quotient de la division euclidienne de n par m.
7. La fonction *reste* mod ou $mod(m, n)$ est le reste de la division euclidienne de n par m.
8. La fonction *puissance* pow où $pow(n, m) = m^n$.
9. La fonction *base* où $base(x, b, i)$ est le i-éme chiffre de x en base b.
10. La fonction $ifThenElse(b, x, y)$ qui vaut y si b vaut 0 et x sinon.
11. La fonction *logarithme* log où $log(n, m)$ est le logarithme en base m de n, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $m^k \leq n$.
12. La fonction *premier* $prime$ où $prime(p) = 1$ si p est premier et 0 sinon.
(*Indice : on pourra définir une ou des fonctions intermédiaires.*)

Définition :
La classe des *fonctions récursives* $\mathcal{R} \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}^k$ (attention, il s'agit de fonctions partielles et non forcément totales !) est la plus petite classe stable par toutes les clauses données pour les fonctions primitives récursives et le *schéma de minimisation*. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ est récursive, alors la fonction partielle

$$\begin{array}{rlcl} \mu(f): & \mathbb{N}^n & \rightharpoonup & \mathbb{N} \\ & (x_0,\dots,x_{n-1}) & \mapsto & \min\left\{ z \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{ll} f(x_0,\dots,x_{n-1},k) > 0 & \text{pour } k < z \\ f(x_0,\dots,x_{n-1},z) = 0 & \end{array} \right\} \end{array}$$

est également récursive.

Exercice 2.

1. Combien existe-t-il de fonctions récursives primitives ?
   (Indice : on pourra considérer une définition « par le bas » des fonctions récursives.)
2. En déduire qu'il existe des fonctions qui ne sont pas primitives récursives.
3. Qu'en est-il des fonctions récursives ?

Exercice 3.
Soit $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une application. On rappelle que la fonction indicatrice du graphe de f est définie par

$$\begin{array}{rccl} \delta_f : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est récursive si et seulement si δ_f l'est également.

Exercice 4.
On définit la fonction d'Ackermann $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ comme :

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0 \end{cases}$$

1. Montrez que la fonction d'Ackermann est récursive.
2. Montrez que la fonction d'Ackermann est strictement croissante en ses deux arguments, et que $A(n, m+1) \leq A(n+1, m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$
3. (Difficile) Montrez que pour toute fonction primitive récursive $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, il existe un entier $P(f) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}, f(n_1,\dots,n_k) < A(P(f), max(n_i))$.
4. Déduisez-en que la fonction d'Ackermann est une fonction récursive qui n'est pas primitive récursive.