

Exercice 1.*Calculs*

On considère les nombres encodés en binaire. Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L’addition de deux entiers.
2. La multiplication de deux entiers.
3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.


Exercice 2.*Palindromes*

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit x un mot de Σ^* . Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant x la machine écrit x^{-1} (x écrit à l’envers)
2. la machine accepte x ssi x s’écrit yy^{-1} pour un certain $y \in \Sigma^*$.
3. la machine accepte x ssi x s’écrit yy pour un certain $y \in \Sigma^*$.

Exercice 3.*Crocodile pusillanime*

Supposons qu’une machine de Turing s’arrête au bout de t étapes de calcul en consommant s cases mémoires (par *consommées*, on entend les cases mémoires qui sont parcourues pendant le calcul).

 Quelle(s) relation(s) existent entre t et s ?

Exercice 4.*Algébriques*

1. Montrez que n’importe quel langage algébrique déterministe peut être reconnu par une machine de Turing.
2. Construisez une machine de Turing qui reconnaît le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 5.*Économies*

Soit M une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de M ce mot est entièrement lu par M au cours du calcul.

1. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M consomme $s(|x|)$ cases mémoires sur l’entrée x alors M' consomme au plus $a + |x| + s(|x|)/c$ cases mémoires sur la même entrée.
2. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M s’arrête sur l’entrée x en $t(|x|)$ étapes alors M' s’arrête sur la même entrée en $a + |x| + t(|x|)/c$ étapes au plus.

Exercice 6.*Aplustre hydriforme*

On appelle **machine de Turing à écriture unique** une machine de Turing à un ruban bi-infini qui peut modifier chacune des cases mémoire au plus une fois.

Ce modèle est-il équivalent au modèle usuel des machines de Turing ?